

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 12.2

### Aufgabe 97

Der Verband Deutscher Automobilhersteller möchte die Nachfrage nach Automobilen mit Hilfe folgender Regressionsgleichung modellieren:

$$y_t = x_{t0}\beta_0 + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

mit

- $y_t$  Automobilabsatz in Mio. Stück im Jahr  $t$  (logarithmiert),
- $x_{t0}$  Variable, die in allen Perioden den Wert 1 annimmt,
- $x_{t1}$  verfügbares Einkommen der privaten Haushalte in Mrd. Euro im Jahr  $t$  (logarithmiert),
- $x_{t2}$  Benzinpreis, Super (bleifrei), in Euro/Liter im Jahr  $t$ .

- (a) Schätzen Sie den Koeffizientenvektor  $\beta$  unter Verwendung folgender Ergebnisse:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 10 & 25 & 10 \\ 20 & 10 & 80 \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.38 & -0.12 & -0.08 \\ -0.12 & 0.08 & 0.02 \\ -0.08 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad X'y = \begin{bmatrix} 20 \\ 36 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad y'y = 63.52.$$

Wie interpretieren Sie den geschätzten Koeffizienten  $\hat{\beta}_2$

- (b) Testen Sie die Nullhypothese  $H_0 : \beta_1 = 0.7$  auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.10$  mit Hilfe eines zweiseitigen Tests. Welche Modellannahmen sind hierfür erforderlich?
- (c) Stellen Sie ein Konfidenzintervall für  $\beta_1$  zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.10$  auf. Welchen Zusammenhang sehen Sie zu dem Test, den Sie unter (b) ausgeführt haben?
- (d) Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  mit einem einseitigen Test die Hypothese, dass der Benzinpreis keinen Einfluss auf die Nachfrage nach Automobilen besitzt. Nehmen Sie dabei  $\sigma^2 = 0.1$  als bekannt an. Warum ist ein einseitiger Test sinnvoll?
- (e) Für das Jahr  $T + 1$  wird ein verfügbares Einkommen von 1493 Mrd. Euro und ein Benzinpreis von 1.01 Euro/Liter erwartet. Erstellen Sie ein 95% Prognoseintervall für den logarithmierten Autoabsatz  $y_{T+1}$ .

## Aufgabe 98

Der Internetprovider Webspeed muss die Computerkapazitäten für das nächste Jahr planen. Hierfür muss insbesondere die Zahl der Internetkunden bei Webspeed prognostiziert werden. Dazu wird folgendes Modell verwendet:

$$y_t = x_{t0}\beta_0 + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad \text{Cov}(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0 \quad \forall s \neq t,$$

wobei

- $y_t$  die Anzahl der Internetkunden in Tsd.,
- $x_{t0}$  eine Konstante mit Wert 1,
- $x_{t1}$  den Preis pro Monat des größten Anbieters in Euro,
- $x_{t2}$  den Preis pro Monat von Webspeed in Euro

angibt. Es liegen Daten für 24 Monate vor und

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 260.0 & 1.2 & 14.0 \\ 1.2 & 0.4 & -0.4 \\ 14.0 & -0.4 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad X'y = 1000 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 2.0 \\ -2.5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ein Firmenmitglied behauptet, dass sich bei einer Preissenkung beim größten Anbieter die Zahl der Internetkunden bei Webspeed substantiell verringern würde. Ist diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  haltbar? Dabei sei  $\sigma^2 = 10$  als wahrer Wert bekannt. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Verteilung der geschätzten Koeffizienten?
- (b) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für  $\beta_2$  zum Konfidenzniveau 0.95. Wie bisher sei  $\sigma^2 = 10$  vorgegeben. Zu welchem Ergebnis kommen Sie hinsichtlich der Nullhypothese  $H_0 : \beta_2 = -2$  auf Basis Ihres Konfidenzintervalls?
- (c) Begründen Sie **formal und verbal**, ob sich Ihre Ergebnisse in (b) ändern würden, falls Sie die Fehlervarianz schätzen müssen und dabei einen Wert von  $\hat{\sigma}^2 = 20$  erhalten.
- (d) Überprüfen Sie die Nullhypothese, dass eine Preissenkung des größten Anbieters um 1 Euro exakt den entgegengesetzten Effekt hat wie eine Preissenkung um 1 Euro durch Webspeed. Legen Sie dabei ein Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  zugrunde. Die geschätzte Fehlervarianz ist wie bisher  $\hat{\sigma}^2 = 20$ .
- (e) Könnte sich Ihre Schlussfolgerung in (d) verändern, wenn Sie das Signifikanzniveau auf  $\alpha = 0.01$  reduzieren? Wie lässt sich eine Reduktion des Signifikanzniveaus interpretieren?



Das wars! Schöne Ferien und viel Erfolg bei der Klausur!