

7 Approximation von Verteilungen

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 7

Aufgabe 39

Es seien X_m für $m \in \mathbb{N}$ hypergeometrisch verteilte Zufallsvariablen mit den Parametern (n, M_m, N_m) , d.h.

$$P(X_m = k) = \frac{\binom{M_m}{k} \binom{N_m - M_m}{n - k}}{\binom{N_m}{n}}, \quad \text{für } k \in \{\max(0, n - (N_m - M_m)), \dots, \min(n, M_m)\}.$$

Des Weiteren gelte

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \lim_{m \rightarrow \infty} N_m = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{N_m} = p \in (0, 1).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(X_m = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

und interpretieren Sie diese anschaulich.

Aufgabe 40

Es seien X_n für $n \in \mathbb{N}$ binomialverteilte Zufallsvariablen mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p_n \in (0, 1)$, d.h.

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n - k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Des Weiteren gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda \quad \text{für ein } \lambda > 0.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Aufgabe 41

Ein Beamter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro immer erst kurz nach Dienstschluss. Die Dauern der täglichen zusätzlichen Arbeitszeiten lassen sich jeweils durch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit einem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben und seien als unabhängig vorausgesetzt.

- Leiten Sie unter Verwendung eines Satzes der Statistik die approximative Verteilung der gesamten zusätzlichen Arbeitszeit eines Jahres für unseren Modellbeamten her.
- Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass unser Modellbeamter in einem Jahr mehr als 16 Stunden zusätzlich arbeitet.

Aufgabe 42

Eine Kiste enthält 5000 Schrauben, von denen 250 ein defektes Gewinde besitzen. Aus der Kiste werden 100 Schrauben ohne Zurücklegen entnommen.

- (a) Welche exakte Verteilung besitzt die Zufallsvariable für die Anzahl der defekten Schrauben unter den 100 gezogenen? Durch welche Verteilungen lässt sich im vorliegenden Fall die exakte Verteilung approximieren?
- (b) Berechnen Sie auf drei verschiedene Arten approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 3 Schrauben unter den gezogenen defekt sind.

Aufgabe 43

Ein Marktforschungsinstitut, das in Foto-Fachgeschäften eine Erhebung machen will, stützt sich bei der zufälligen Auswahl von $n = 200$ Geschäften auf eine erworbene Adressenliste. Von den mehr als 5000 Adressen auf der Liste sind allerdings 15% nicht mehr gültig.

- (a) Wie ist die Anzahl der ungültigen Adressen in der Stichprobe exakt verteilt und wie lässt sie sich approximieren? Gehen Sie dabei davon aus, dass die Adressen mit Zurücklegen gezogen werden.
- (b) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe genau 20 Adressen ungültig sind.
- (c) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe zwischen 20 und 30 Adressen ungültig sind.

Aufgabe 44

Die Wahrscheinlichkeit p , dass eine Reißzwecke beim Herunterfallen auf die falsche Seite fällt, (die Spitze also nach oben zeigt) kann nur empirisch festgestellt werden. Man möchte nun p mittels einer Versuchsserie so abschätzen, dass sich die relative Häufigkeit und p um höchstens 0.01 unterscheiden. Wie groß muss die Zahl der Versuche mindestens sein, damit dieser Abstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 eingehalten wird?

Aufgabe 45* (8 Punkte)

In einer Reihenhaussiedlung werden 40 Wohneinheiten geplant. Um eine ausreichende Anzahl von Spiel- und Sportplätzen etc. einrichten zu können, interessiert man sich von zuständiger Seite dafür, mit wievielen Kindern zu rechnen ist.

Ist die Wahrscheinlichkeit, dass in die Siedlung mehr als 40 Kinder einziehen unter 0.2, so können die bisherigen Planungen beibehalten werden.

Ziehen Sie zur Bewertung folgende Daten aus dem Mikrozensus 2006 heran:

Anzahl der Kinder unter 18 J. in Mehrpersonenhaushalten	0	1	2	3	4
Anteil	0.52	0.24	0.18	0.05	0.01

Der Anteil der Mehrpersonenhaushalte mit mehr als 5 Kindern unter 18 Jahren ist vernachlässigbar klein. Entscheiden Sie, ob das geplante Konzept geändert werden muss.

Aufgabe 46* (8 Punkte)

Die Lebensdauer einer Tonercassette wird sowohl von produktionsbedingten Schwankungen als auch vom Schwärzungsgrad der gedruckten Seiten bestimmt. Mit einer Tonercassette können im Mittel 4.000 Seiten gedruckt werden, bei einer Standardabweichung von 500 Seiten.

Wieviele Cassetten sollen für die nächsten 6 Monate mindestens beschafft werden, wenn ein Halbjahres-output von 90.000 Seiten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 abgedeckt sein soll? Verwenden Sie eine möglichst genaue Approximation.