

## 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 4.1 - 4.3

### Aufgabe 1

Geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  für folgende Zufallsexperimente an

- (a) viermaliger Münzwurf,
- (b) Anzahl von Insekten befallener Blätter einer Pflanze,
- (c) Lebensdauer (in Stunden) von Glühlampen einer bestimmten Marke,
- (d) das Gewicht von 10 Tage alten Rattenbabys,
- (e) Anteil beschädigter elektronischer Bauteile in einer Lieferung.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relationen

- (a)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c$ ,
- (b)  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ ,
- (c)  $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ ,
- (d)  $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$  und  $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ .

### Aufgabe 3\* (8 Punkte)

Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine Sechs erscheint. Wie lässt sich der Ergebnisraum dieses Experimentes beschreiben? Sei  $A_n$  das Ereignis, dass das Experiment nach genau  $n$  Würfeln beendet wird. Welche Elemente des Ergebnisraumes enthält  $A_n$ ? Wie lässt sich das Ereignis  $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$  interpretieren?

### Aufgabe 4

Sei  $\Omega$  ein Ergebnisraum. Zeigen Sie, dass für  $A, B \subset \Omega$  gilt:

- (a)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- (b)  $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$ ,
- (c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

### Aufgabe 5

Als Laplace-Experiment bezeichnet man einen zufälligen Versuch mit endlich vielen Ausgängen, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Zeigen Sie, dass bei einem Laplace-Experiment für jede Teilmenge  $A$  des Ergebnisraumes  $\Omega$  gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

mit  $|A|$  der Mächtigkeit von  $A$  (Für eine endliche Menge  $A$  gilt  $|A| = \#\{\omega : \omega \in A\} = \sum_{\omega} 1_{\{\omega \in A\}}$ ).

### Aufgabe 6\* (8 Punkte)

Bei einer Multiple-Choice-Klausur sind 6 Fragen jeweils 4 Antwortmöglichkeiten beigegeben, wovon jeweils nur eine richtig ist. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 4 Fragen richtig beantwortet wurden. Ein Student kreuzt bei den 6 Fragen jeweils eine Antwort zufällig an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Klausur bestanden?

### Aufgabe 7

Ein Scheich hat in seinem Harem  $n$  ( $3 < n \leq 50$ ) Damen. Um nicht ständig die Qual der Wahl zu haben, zieht er jeden Abend blind aus einer Urne mit  $n$  von 1 bis  $n$  durchnummerierten Kugeln drei Kugeln nacheinander. Gezogene Kugeln legt er direkt in die Urne zurück. Jede der Nummern repräsentiert eine der Haremsdamen, so dass die Chance besteht, den Abend mit einer Dame, zwei oder drei Damen zu verbringen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbringt der Scheich den Abend mit  $i$  Damen,  $i = 1, 2, 3$ ?

### Aufgabe 8

Die Regierungschefs der vier skandinavischen Länder Dänemark, Schweden, Norwegen und Finnland wollen sich zum Abschluß eines Gipfeltreffens zusammen mit ihren Außenministern in eine Reihe zum Familienfoto aufstellen. Angenommen, die Anordnung erfolgt rein zufällig,

- (a) wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Außenminister neben seinem Chef steht?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Außenminister neben seinem Chef steht?

### Aufgabe 9

Frau Müllers Firma gibt ein Essen für alle Angestellten, die mindestens eine Tochter haben. Es ist bekannt, dass Frau Müller zwei Kinder hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beides Töchter sind, wenn bekannt ist, dass Frau Müller eingeladen wird?