

1 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix $rg(\mathbf{A})$ kann definiert werden als die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von \mathbf{A} . D.h. wenn man einen (oder mehr) der Spaltenvektoren als Linearkombination der anderen darstellen kann, so sind die Vektoren nicht linear unabhängig und die Matrix hat keinen vollen Rang. Zum Beispiel hat die folgende 3×3 - Matrix nur den Rang 2, da der dritte Spaltenvektor als Linearkombination der ersten beiden darstellbar ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad rg(\mathbf{A}) = 2, \quad \text{weil} \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann den Rang einer Matrix auch über die Zeilen definieren, allerdings gilt immer:

$$\text{Spaltenrang}(\mathbf{A}) = \text{Zeilenrang}(\mathbf{A}).$$

Eine quadratische Matrix mit vollem Rang $rg(\mathbf{A}) = n$ heißt *regulär*. Ist der Rang der quadratischen Matrix $rg(\mathbf{A}) < n$ spricht man von einer *singulären* Matrix.

2 Determinante

Eine Matrix hat nur dann eine von null verschiedene Determinante, wenn sie regulär ist, also quadratisch ist und vollen Rang $rg(\mathbf{A}) = n$ hat.

Determinantenberechnung für eine 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = a d - c b$$

Für 3×3 - Matrizen kann man Determinanten sehr bequem mit der Regel von Sarrus berechnen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = a e i + b f g + c d h - g e c - h f a - i d b$$

Für Matrizen höherer Ordnung müssen andere Berechnungsverfahren angewandt werden.

3 Inverse

Die Inverse \mathbf{A}^{-1} zu einer Matrix \mathbf{A} ist die Matrix, mit der man \mathbf{A} multiplizieren muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten, also z.B. bei einer 3×3 - Matrix

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, d.h. $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$, können Inversen nur zu quadratischen Matrizen bestimmt werden. Da die Inversenbestimmung u.a. die Determinante benötigt, können auch nur Matrizen mit vollem Rang invertiert werden.

Inversenbestimmung für eine 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversenbestimmung für eine 3×3 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} (ei - fh) & (ch - bi) & (bf - ce) \\ (fg - di) & (ai - cg) & (cd - af) \\ (dh - eg) & (bg - ah) & (ae - bd) \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} , für die gilt, dass $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ heißt *orthogonal*.