

### Aufgabe 21

Bestimmen Sie jeweils den Gradienten und die Hessematrix der folgenden Funktionen:

$$f(x, y) = x^3 + \sin(y), \quad g(x, y) = x^3 \cos(y).$$

### Aufgabe 22

Betrachten Sie das Skalarprodukt von zwei Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  als Funktion auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

- (a) Bestimmen Sie allgemein den Gradienten dieser Funktion.
- (b) Untersuchen Sie am Beispiel  $n = 1$ , ob diese Funktion ein lokales Minimum oder Maximum besitzt.

### Aufgabe 23

Sei  $f$  eine reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 3 \cos(x) \exp(y) - y^3 + x.$$

- (a) Bestimmen Sie zunächst den Gradienten und anschließend das totale Differential an der Stelle  $(\pi, 0)$ .
- (b) Wie groß ist die abgeschätzte Veränderung von  $z$ , wenn  $x$  und  $y$  jeweils um  $+0.01$  vom Punkt  $(\pi, 0)$  abweichen?

### Aufgabe 24 (Aufgabe aus Klausur 2008)

Gegeben seien die folgenden beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) &\mapsto g(x, y) = (x^2, y^2) \quad \text{und} \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto f(u, v) = e^{u-v}. \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion  $f \circ g$ .
- (b) Bestimmen Sie den Gradienten von  $f \circ g$ .
- (c) Hat die Funktion  $f \circ g$  ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum oder weder das Eine noch das Andere?

**Aufgabe 25** (Zusatzaufgabe aus der Matheübung SoSe 2010)

Sei  $f(x, y) = ax^3 + by$  und  $x(t) = \ln t$ ,  $y(t) = e^t$ .

- (a) Geben Sie mit  $\rho(t) = (x(t), y(t))$  die zusammengesetzte Funktion  $f \circ \rho$  an.
- (b) Berechnen Sie das totale Differential von  $f \circ \rho$  an der Stelle  $t = t_0$ .
- (c) Leiten Sie im Sinne der Differentiation in einer reellen Variable  $f \circ \rho$  ab.