

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 9.1 - 9.3

### Aufgabe 57

Die Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktion

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

für  $\sigma^2$ , d.h. das Analogon der empirischen Varianz aus der deskriptiven Statistik nicht erwartungstreu ist.

- (b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass die alternative Schätzfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

als Analogon der aus der deskriptiven Statistik bekannten Stichprobenvarianz eine erwartungstreue Schätzung für  $\sigma^2$  ist.

### Aufgabe 58

Zeigen Sie, dass eine im quadratischen Mittel konsistente Schätzfunktion auch schwach konsistent ist.

### Aufgabe 59\* (8 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  für die sowohl  $E(X) = \mu$  als auch  $Var(X) = \sigma^2$  existieren. Als Schätzfunktion für  $\mu$  wurden von verschiedenen schlaun Statistikern die folgenden Vorschläge gemacht

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \bar{X} \\ \hat{\mu}_2 &= \bar{X} + 0.0001 \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{n+1}{n} \bar{X}\end{aligned}$$

Sie können dabei davon ausgehen, dass die Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch wie  $X$  verteilt sind.

- (a) Überprüfen Sie die Schätzfunktionen auf ihre Erwartungstreue.  
(b) Berechnen Sie für die Schätzfunktionen jeweils den MSE. Welche der Schätzer sind MSE-konsistent?  
(c) Welche der Schätzfunktionen würden Sie favorisieren und warum?

### Aufgabe 60

Es sei  $(X_1, \dots, X_n)$  eine i.i.d. Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit zum Parameter  $\lambda > 0$ .

- (a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion und eine Maximum-Likelihood-Schätzung  $\hat{\lambda}_1$  für  $\lambda$ .
- (b) Bestimmen Sie Momentenschätzungen  $\hat{\lambda}_2$  und  $\hat{\lambda}_3$  für  $\lambda$ , indem Sie das erste und das zweite Moment betrachten.
- (c) Wie lautet der MAP-Bayes-Schätzer  $\hat{\lambda}_{MAP}$ , falls Sie als a priori Dichte für  $\lambda$  eine Exponentialverteilung mit dem Hyperparameter  $\nu > 0$  annehmen. Wann stimmen  $\hat{\lambda}_1$  und  $\hat{\lambda}_{MAP}$  überein? Zeigen Sie, dass  $\hat{\lambda}_1$  und  $\hat{\lambda}_{MAP}$  übereinstimmen, wenn Sie als a priori Dichte für  $\lambda$  eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall  $[0, b]$  mit  $b > 0$  annehmen.

### Aufgabe 61\* (8 Punkte)

Seien die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und unbekannter Varianz  $\sigma^2$ .

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\mu$  und  $\sigma^2$  sind.

- (b) Zeigen Sie, dass  $\hat{\mu}_{ML}$  schwach konsistent ist.