

Aufgabe 7

Bringen Sie die gegebene Matrix \mathbf{X} in Dreiecksgestalt und bestimmen Sie den Rang. Ist \mathbf{X} regulär?

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 6 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche reellen Zahlen a gilt jeweils

- $\text{rg}(\mathbf{A}) = 1$
- $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$
- $\text{rg}(\mathbf{A}) = 3$?

(b) Ist die Matrix \mathbf{A} für $a = 12$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9

Betrachten Sie weiterhin die Matrix \mathbf{A} aus Aufgabe 8, und zwar für $a = 4$, sowie die Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.4)$ und die folgende Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, sofern möglich, die Determinanten der Matrizen.
- (b) Welchen Wert hat die Determinante der Matrix \mathbf{X} aus Aufgabe 7?
- (c) Bestimmen Sie die Spur der Summenmatrix der beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} , d.h. $\text{sp}(\mathbf{A} + \mathbf{D})$.
- (d) Bestimmen Sie die Inverse von \mathbf{D} .

Aufgabe 10

Sei \mathbf{A} eine beliebige, quadratische Matrix, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix mit dem Adjunktenverfahren (Siehe dazu u.a. Zusatzblatt 2a):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12 (Zusatzaufgabe)

Nehmen Sie an, Sie haben in einer Studie 3 Personen befragt. Sei \mathbf{X} die Matrix mit den beobachteten Kovariablen-Werten und \mathbf{y} der Vektor mit den beobachteten Werten der interessierenden Response-Variable.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den KQ-Schätzer für ein lineares Regressionsmodell, d.h. $\hat{\beta}_{KQ} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.