

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , sowie der Vektor \mathbf{y} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Zeichnen Sie den Vektor \mathbf{y} in ein cartesisches Koordinatensystem ein.
- (ii) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{B}\mathbf{y}$ und zeichnen Sie den Ergebnisvektor \mathbf{b} ebenfalls in das Koordinatensystem. Wie lässt sich die mit \mathbf{B} durchgeführte Operation geometrisch interpretieren?
- (iii) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (iv) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Warum ist das Ergebnis verschieden von \mathbf{b} ?

Aufgabe 2

Geben Sie je ein Beispiel für eine

- (i) quadratische Matrix
- (ii) symmetrische Matrix
- (iii) Diagonalmatrix
- (iv) obere Dreiecksmatrix
- (v) Bandmatrix.

Aufgabe 3

Welche besondere Eigenschaft hat jeweils eine

- (i) orthogonale Matrix
- (ii) idempotente Matrix
- (iii) symmetrische Matrix?

Aufgabe 4

Bringen Sie folgende 5×5 - Matrix in die Dreiecksform. Nutzen Sie dafür den im Matrixalgebra-Skript beschriebenen Algorithmus 1.2 (Siehe Seiten 21 ff., insbesondere auch Beispiel 1.18.).

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Sehen Sie sich zur Vorbereitung dieser Aufgabe die Beweise auf den Seiten 40 - 43 des Matrixalgebra-Skriptes genauer an.

- (i) Zeigen Sie, dass die Gerade $g(x) = \frac{1}{2}x$ ein Unterraum des Vektorraums \mathbb{R}^2 ist.
- (ii) Warum ist die Gerade $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$ kein Unterraum des \mathbb{R}^2 ?
- (iii) Ist der Durchschnitt zweier Unterräume U_1 und U_2 ein Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{B} aus Aufgabe 4 linear unabhängig sind.

Aufgabe 7

Sind die Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{b} aus Aufgabe 1 orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort.