

1 Matrizen

Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ - Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$$

Wird die Matrix \mathbf{A} transponiert, dann werden die Zeilen und Spalten vertauscht, d.h. \mathbf{A}^T hat n Zeilen und m Spalten, ist also eine $n \times m$ - Matrix.

1.1 Spezielle Matrizen

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *quadratisch*, wenn sie gleich viele Zeilen wie Spalten hat. \mathbf{A} ist dann eine $n \times n$ - Matrix.

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *symmetrisch*, wenn gilt $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Z.B.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *Diagonalmatrix*, wenn nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen von null verschieden sind. Eine Diagonalmatrix ist demnach auch symmetrisch. Z.B.

$$\mathbf{A} = \text{Cov}(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Eine *Bandmatrix* \mathbf{A} kann ebenfalls symmetrisch sein, z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es sind aber auch nicht-symmetrische Bandstrukturen möglich.

2 Formeln und Rechenregeln

2.1 Addition

Seien \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} je $m \times n$ - Matrizen, also gleicher Ordnung, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist die Addition so definiert:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \cdots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & \cdots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \cdots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix} = \{(a_{ij} + b_{ij})\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$$

Es gelten folgende Rechenregeln für die Addition (und Skalarmultiplikation):

- (1) Kommutativgesetz: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (2) Assoziativgesetz: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (3) Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation: $\lambda(\mu \mathbf{A}) = \lambda \mu \mathbf{A} = \{\lambda \mu a_{ij}\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$
- (4) Distributivgesetz der Skalarmultiplikation: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$ bzw. $(\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$

2.2 Multiplikation

Seien \mathbf{A} eine $m \times n$ - Matrix, \mathbf{B} eine $n \times k$ - Matrix und \mathbf{C} eine $k \times l$ - Matrix, (also jeweils solcher Ordnungen, dass die Spaltenanzahl der ersten Matrix der Zeilenanzahl der zweiten Matrix entspricht), dann ist die Multiplikation so definiert:

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}'_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_2 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_2 \mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}'_m \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_m \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_m \mathbf{b}_k \end{pmatrix} = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh} \right\}_{i=1, \dots, m, h=1, \dots, k}$$

wobei \mathbf{a}'_i der i-te Zeilenvektor von \mathbf{A} ist und \mathbf{b}_h die h-te Spalte von \mathbf{B} .

Es gelten folgende Rechenregeln für die Multiplikation:

- (1) $(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}$
- (2) $\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{C}$
- (3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{C}$
- (4) $(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- (5) $\mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \mathbf{A}$, wobei \mathbf{I}_n die n -dimensionale Einheitsmatrix ist