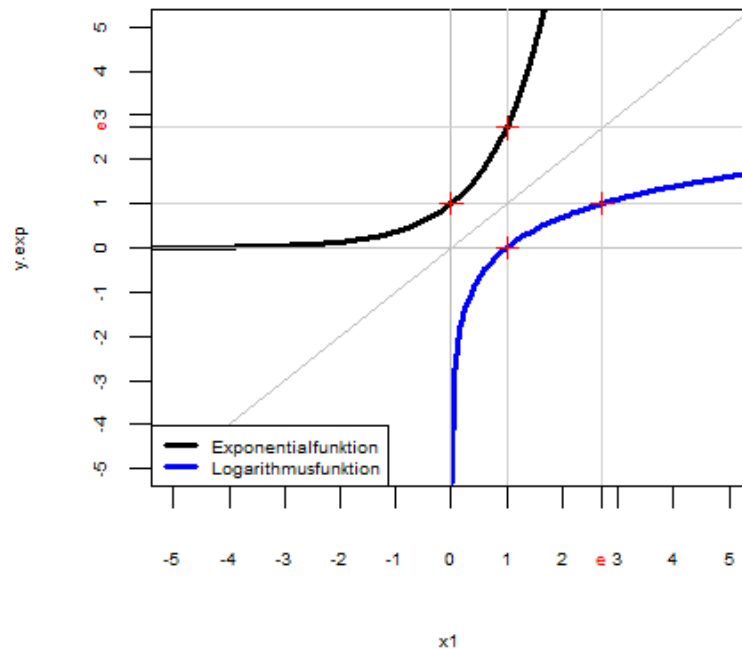


# 1 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion



Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\log : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log(x) = y \Rightarrow \exp(y) = x$$

$$\exp(1) = e$$

$$\log(e) = 1$$

$$\exp(0) = 1$$

$$\log(1) = 0$$

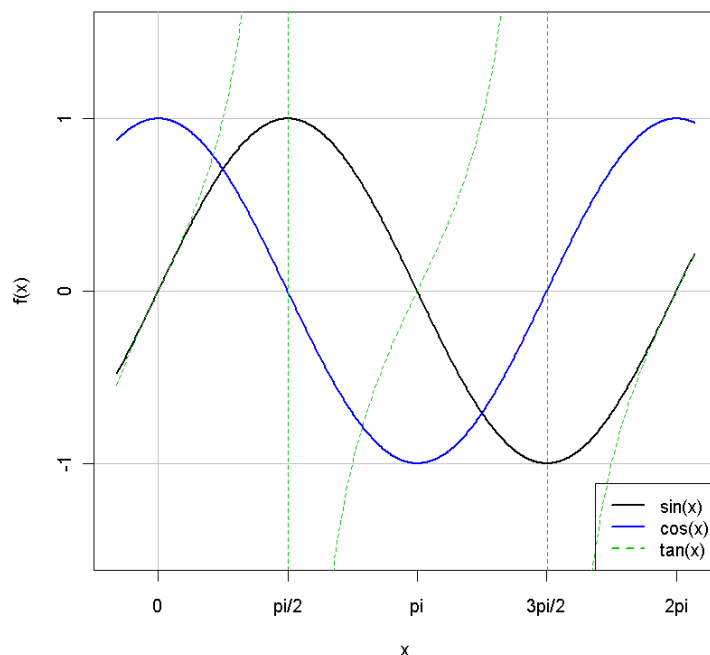
Man begegnet beiden Funktionen häufig in der Statistik, z.B. ist die Dichtefunktion der Normalverteilung für  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Die Logarithmusfunktion tritt beispielsweise beim Logit-Modell auf, das folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$\log \left( \frac{\text{P}(Y = 1 | X_1 = x)}{1 - \text{P}(Y = 1 | X_1 = x)} \right) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}.$$

## 2 Trigonometrische Funktionen



$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

### 2.1 Geometrische Definition von $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  und  $\tan(x)$  können geometrisch auf Basis eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  definiert werden.  $\phi$  ist der interessierende Winkel beim Punkt  $A$  und der rechte Winkel liegt bei  $B$ . Dann heißt die Seite  $\overline{AB}$  *Ankathete*, die Seite  $\overline{BC}$  heißt *Gegenkathete* und die längste Seite  $\overline{AC}$  *Hypotenuse*. Die trigonometrischen Funktionen können damit definiert werden als:

$$\sin(\phi) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\phi) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \text{und} \quad \tan(\phi) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}.$$

### 2.2 $\sin(x)$ und $\cos(x)$ als unendliche Reihen

Ähnlich wie die Exponentialfunktion können die Funktionen auch als unendliche Reihen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$